

Programmation Linéaire, une nouvelle approche

Novel way in linear programming

I. Faye^{1,2} ; I. Lavallée^{4*} ; M. Ngom^{1,2} ; D. Seck^{2,3} ; A. Sy^{1,2†}

13 août 2010

¹ U.F.R de Sciences Appliquées et des Technologies de
l'Information et de La Communication

Université de Bambey BP 30, Bambey, Sénégal

² Laboratoire de Mathématiques de la Décision et d'Analyse Numérique

École Doctorale Mathématiques et Informatique

UCAD BP 16 889 Dakar-Fann Sénégal

³ Faculté des Sciences Economiques et de Gestion UCAD. Dakar

⁴ LaISC Université Paris 8 & C.N.R.S. UMI ESS 3189, BP. 5005, UCAD Dakar

Résumé

Après un bref aperçu permettant de situer notre travail, nous proposons une nouvelle voie pour aborder la programmation linéaire en proposant un algorithme élaboré à partir d'une idée simple qui permet d'obtenir une solution aussi approchée que voulu par translation dichotomique d'un hyperplan de l'espace des solutions.

Mots clés : Algorithme, Programmation Linéaire, polyèdre, polytope, hyperplan, dichotomie, optimisation, approximation.

Abstract

After a short course in order to situate our work, we propose a new way to study linear programming and we give a proposal of algorithm to solve linear programming from a basic idea which allow to obtain an approached solution with desired accuracy. For this we use some dichotomic translations of an hyperplan in the solutions hyperspace.

*ivan.lavallee@gmail.com

†{azousy2, dseck, grandmbodj, ngomata}@hotmail.com

Keywords : Algorithm, Linear programming, polyhedron, polytop, hyperplan, dichotomy, optimization, approximation.

1 Introduction

Le problème de programmation linéaire s'est rapidement imposé dès qu'on a voulu planifier un tant soit peu les activités économiques ou autres. C'est ainsi que dès les années 1939, les nécessités de la planification soviétique conduisent Kantorovitch et Tolstoï à proposer une solution au problème, (voir [Kan39, Tol39]) inspirée plus ou moins des travaux de Joseph Fourier (1768-1830). En 1951 Dantzig publie les résultats de Kantorovitch-Tolstoï sous forme d'algorithme exécutable sur ordinateur (voir [Dan51]) et lui donne le nom de *simplex*. Cet algorithme fait le tour du monde sans aucun concurrent jusqu'en 1979 avec l'apparition de l'algorithme dit de *l'ellipsoïde* (voir [Kha79]), qui est en *temps polynomial*, ce qui, dans le pire des cas (dégénérescence), n'est pas le cas du *simplex*. Paraît ensuite un autre algorithme polynomial basé sur une autre idée, celui de Karmarkar (voir [Kar84a] et [Kar84b]), puis en 1989 l'algorithme de Murty & Chang (voir [CM89]). Ce dernier algorithme étant amélioré en 2006 (voir [Mur06b, Mur06a]). Ces algorithmes, *simplex*, *ellipsoïde*, *Karmarkar*, *Murty* sont souvent caractérisés comme étant, *de frontière* pour le *simplex*, *extérieur* pour *l'algorithme de l'ellipsoïde*, *intérieur* pour *les algorithmes de Karmarkar et de Murty*. D'autres aussi proposent une approche un peu différente (voir par exemple [NPL09, PL09]). Dans le présent article, nous avons voulu présenter une méthode, qu'on peut qualifier, d'*extérieure-intérieure*, ou encore *alternante* basée sur une idée géométrique de dichotomie de l'espace. Il s'agit de considérer (dans le cas d'une maximisation) un hyperplan particulier de la famille de ceux définis par la fonctionnelle à optimiser, tantôt extérieur au polytope des contraintes, tantôt le recoupant, et de se rapprocher par translation contrôlée, autant qu'on le souhaite de la solution optimale par un argument de dichotomie. On obtient ainsi une solution approchée aussi précise que voulu, ce qui est essentiel dans le domaine pratique, l'optimum sur le modèle n'étant quasiment jamais l'exact optimum dans la réalité modélisée.

2 Position du problème

Dans toute la suite E désigne un \mathbb{R} –espace-vectoriel ; \mathbb{R} étant l'ensemble des nombres réels.

On appelle problème de *programmation linéaire*, tout problème pouvant s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=1}^n c_i x_i \quad c_i \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{N}^* \\ s/c \quad & \begin{cases} \sum_{i=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0 \end{cases} \quad a, b \in \mathbb{R}; j = 1 : m, i = 1 : n \end{aligned} \quad (1)$$

On rappelle qu'un polyèdre convexe de E est un ensemble P de la forme

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}, \quad (2)$$

où $A : E \rightarrow \mathbb{R}$ est une application linéaire ($m \in \mathbb{N}$; si $m = 0$, $P = E$), $b \in \mathbb{R}^m$ et l'inégalité $Ax \leq b$ se lit composante par composante dans \mathbb{R}^m ($Ax)_i \leq b_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$. Si l'ensemble se présente avec des égalités linéaires, $Cx = d$ on pourra se ramener sous la forme (2) en les remplaçant par deux inégalités opposées $Cx \leq d$ et $-Cx \leq -d$. Un polytope est un polyèdre convexe et borné.

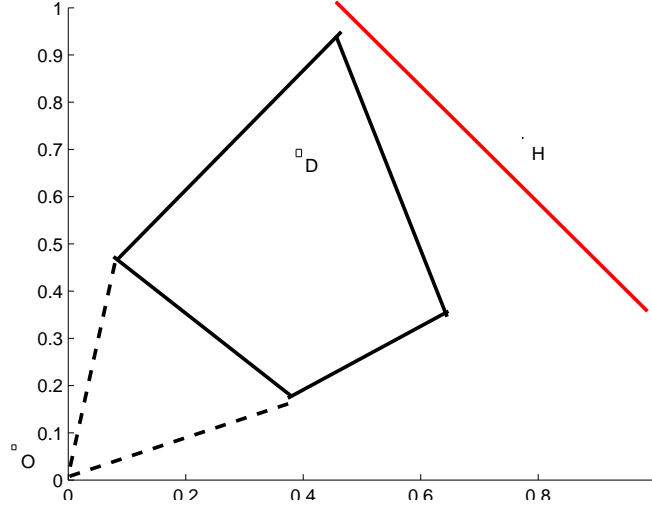
Géométriquement, un polyèdre est donc l'intersection d'un nombre fini de demi-espaces de E . Si E est de dimension finie, il n'y a pas de restriction à supposer que $E = \mathbb{R}^n$ et que A est une matrice $m \times n$ (il suffit de donner une base de E). Dans certaines circonstances, par exemple en optimisation linéaire, il est plus avantageux de représenter un polyèdre de \mathbb{R}^n sous la forme dite standard suivante :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}. \quad (3)$$

Il n'y a aucune perte de généralité dans cette représentation. Tout polyèdre de la forme (2) se représente sous la forme (3) en introduisant des variables d'écart.

Remarque 2.1 Les représentations (2) et (3) sont dites *duals*, car elles font intervenir des applications linéaires (éléments du dual de E).

On considère le polytope D (voir figure) supposé contenir l'origine O , sinon, on peut toujours introduire les variables d'écart de sorte que l'origine $O \in D$.



Séparation de l'espace en deux parties par un hyperplan dont l'une contient le polytope.

3 Quelques rappels en optimisation

Soient f une forme linéaire sur E , et $\alpha \in \mathbb{R}$, A, B deux sous ensembles de E .

$$f(X) = \sum_{j=1}^n k_j x_j, \quad n \in \mathbb{N}^*; k_j \in \mathbb{R}$$

Définition 3.1 Un sous-ensemble C de E est dit convexe si $\forall x, y \in C$ et $\lambda \in [0, 1]$ on a $\lambda x + (1 - \lambda)y \in C$, On note

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y, 0 \leq \lambda \leq 1\}$$

Définition 3.2 On appelle hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$, l'ensemble défini par

$$H = \{X \in \mathbb{R}^N, \text{ tel que } f(X) = \alpha.\} \quad (4)$$

H est fermé $\iff f$ est continue.

3.1 Séparation des ensembles convexes

Un outil essentiel en analyse convexe est le théorème de Hahn-Banach sur la séparation des ensembles convexes. On supposera que l'espace vectoriel E est de dimension finie. On peut toujours le munir d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

La séparation de deux ensembles convexes se fait géométriquement dans E en utilisant un hyperplan affine H , c'est-à-dire un ensemble de la forme

$$H = \{x \in E : \langle \xi, x \rangle = \alpha\};$$

où $\xi \in E$ est non nul et $\alpha \in \mathbb{R}$. On dit que cet hyperplan sépare deux convexes C_1 et C_2 si l'on a

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2 : \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha \leq \langle \xi, x_2 \rangle$$

Ceci sera certainement le cas s'il existe un ξ non nul dans E tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

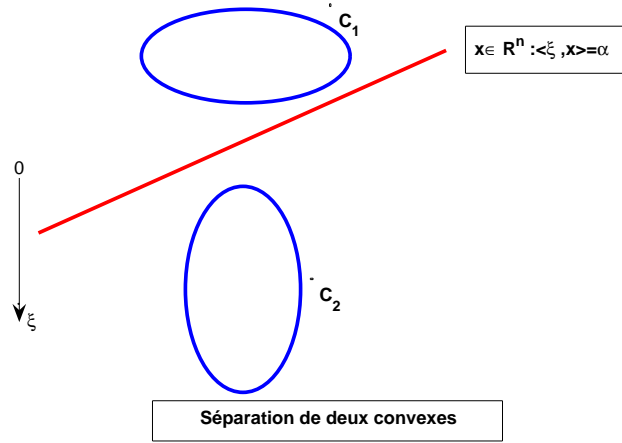
On dit que cet hyperplan sépare strictement ces deux convexes s'il existe deux scalaires α_1 et α_2 tels que $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$ et

$$\forall x_1 \in C_1, \forall x_2 \in C_2 : \langle \xi, x_1 \rangle \leq \alpha_1 < \alpha_2 \leq \langle \xi, x_2 \rangle$$

Ceci sera certainement le cas s'il existe un ξ (nécessairement non nul) dans E tel que

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle < \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

La figure ci dessous illustre cette notion. Ici, on a utilisé le produit euclidien sur \mathbb{R}^2 .



3.2 Théorèmes de Hann-Banach

Nous allons donner ici quelques résultats classiques en optimisation convexe et dont les démonstrations peuvent être trouvées dans [Gil06], et aussi dans [Ach84] pour ce qui concerne les polyèdres. Ces résultats sont connus dans la littérature sous le nom de formes géométriques du théorème de Hann-Banach ou de séparation des ensembles convexes. Le premier affirme que l'on peut séparer strictement deux ensembles convexes disjoints, si l'un est fermé et l'autre est compact. Le second exprime que l'on peut séparer (non strictement cette fois) deux ensembles convexes quelconques (en dimension finie).

Théorème 3.1 (Hann-Banach I) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient C_1 et C_2 deux convexes disjoints non vides de E , tels que $C_1^\infty \cap C_2^\infty = \{0\}$. Alors, on peut séparer C_1 et C_2 strictement : il existe un vecteur $\xi \in E$ tel que*

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle < \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

Corollaire 3.1 *Soient C_1 et C_2 deux convexes non vides disjoints d'un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$, on suppose l'un fermé et l'autre compact, alors on peut séparer C_1 et C_2 strictement.*

Théorème 3.2 (Hann-Banach II) *Soit E un espace vectoriel de dimension finie, muni d'un produit scalaire noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Soient C_1 et C_2 deux convexes disjoints non vides de E . Alors, il existe un vecteur $\xi \in E$ non nul tel que*

$$\sup_{x_1 \in C_1} \langle \xi, x_1 \rangle \leq \inf_{x_2 \in C_2} \langle \xi, x_2 \rangle$$

Définition 3.3 *Soient $C \subset E$ un convexe et H un hyperplan fermé tel que $\exists u \in C \cap H$, on peut supposer que $H = \{f = \alpha\}$ $f \in E'$, E' étant le dual de E , et $\alpha \in \mathbb{R}$. si $C \leq \{f \geq \alpha\}$ ou $C \subset \{f \leq \alpha\}$ on dit que H supporte A en u ou que u est un point de support de C .*

Corollaire 3.2 1- *Soit C un convexe fermé non vide $\forall u \in \partial C$ (bord de C), u est un point de support de C ; Si C est un ensemble convexe d'un espace vectoriel topologique, par tout point frontière passe un hyperplan d'appui.*

2- *Soit C un ensemble convexe fermé, Alors*

$$C = \bigcap_{\Pi \in p} \Pi$$

p est l'ensemble des demi-espaces fermés contenant C .

4 Algorithme proposé

Dans ce paragraphe, nous proposons un algorithme d'optimisation permettant de résoudre le problème de programmation linéaire donné sous forme (1).

Soit H l'hyperplan défini par (4) et K le polytope défini par l'ensemble des contraintes de (1). En utilisant les théorèmes de séparation, on peut toujours séparer l'espace en deux parties par l'hyperplan de sorte qu'une partie contienne le polytope K des contraintes.

Trois possibilités apparaissent alors :

- soit l'hyperplan H ne coupe pas le polytope K des contraintes et dans le cas d'une maximisation comme dans le PL de la formule 1 et alors H est « au-delà » des solutions réalisables, c'est-à-dire qu'il n'en peut contenir aucune et il convient alors de choisir un autre hyperplan $H' // H$ situé entre l'origine du repère (*i.e.* le point 0) et H ;
- soit l'hyperplan H coupe le polytope des contraintes et il faut alors inclure H dans les contraintes et choisir un autre hyperplan de séparation de l'espace $H^* // H$ situé dans le demi-espace ne contenant pas 0 ;

– soit le polytope des contraintes est vide.

Si $H \cap K = \emptyset$, alors, en reprenant la notation de la définition 3.2, on définit un nouvel hyperplan $H' = \{f = \frac{\alpha}{2}\}$ par exemple ; il va exister alors deux valeurs de α , α_{s_0} et α_{s_1} , avec s_{-1} et $s_0 \in \mathbb{N}^*$ telles que l'hyperplan $H_{s_0} = \{f = \alpha_{s_0}\} \cap K \neq \emptyset$ alors que $H_{s_{-1}} = \{f = \alpha_{s_{-1}}\} \cap K = \emptyset$. On pose alors :

$$H_{s+1} = \{f = s_{+1} = \frac{\alpha_{s_0} + \alpha_{s_{-1}}}{2}\}$$

Puis si $H_{s+1} \cap K = \emptyset$, on pose $s_{-1} = s_{+1}$;

Sinon, si $H_{s+1} \cap K \neq \emptyset$, on pose $s_0 = s_{+1}$.

Dans cet algorithme, l'hyperplan choisi est défini par

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n / \sum_{i=1}^n c_i x_i = \alpha\} \quad (5)$$

où $\sum_{i=1}^n c_i x_i$ représente la fonction objectif du problème de programmation linéaire.

Remarque 4.1 *A chaque pas de l'algorithme, le nouvel hyperplan se déduit du précédent par translation. En effet, on cherche les vecteurs qui engendrent l'espace H défini par (5) puis on cherche un vecteur unitaire \vec{v} qui représente le pas vectoriel de la translation.....*

4.1 Un sous-problème clé

Dans cet algorithme, une difficulté réside dans l'identification de la vacuité -ou la **non**-vacuité- de l'intersection de l'hyperplan avec le polyèdre des contraintes :

$$H \cap K = \emptyset ? \quad (6)$$

Au plan théorique, l'article de Murty [Mur06b] résoud le problème polynomialement. Du point de vue pratique, dans les cas de non-dégénérescence, le problème peut être résolu par l'utilisation de la méthode dite "du grand M ".

5 Conclusion et Perspectives

¹ Cette étude ouvre une voie originale en matière de programmation linéaire qui n'est inspirée d'aucune des méthodes existantes mais qui utilise

1. Cette étude nous a été facilitée par l'amitié et l'aide bibliographique de Pham Canh Duong du CNST à Hanoï.

toutefois la méthode dit *du point intérieur* de Murty pour la résolution d'un sous problème clé. Il reste à examiner en quoi cette méthode est utilisable en programmation linéaire en nombres entiers et en programmation linéaire paramétrique. La méthode peut aussi s'étendre à la programmation non linéaire dans quelques cas particuliers.

Références

- [Ach84] S. Achmanov. *Programmation Linéaire*. Édition Mir, 1984. Traduit du Russe, édition Russe 1981.
- [CM89] S. Y. Chang and K. G. Murty. The steepest descent gravitational method for linear programming. *Discrete Applied Mathematics*, 25 :211–239, 1989.
- [Dan51] G.B. Dantzig. Minimization of a linear function of variables subject to linear inequalities. In T.C. Koopman, editor, *In Activity, Analysis of production and allocation*, pages 339–347. John Wiley, New York, 1951.
- [Gil06] J.C. Gilbert. *Optimisation différentielle : Théorie et algorithmes*. École Nationale Supérieure des Techniques Avancées, 2005-2006. Cours.
- [Kan39] L.V. Kantorovitch. Méthodes mathématiques d'organisation et planification de la production, 1939. En Russe Léninegrad 1939, traduction anglaise Mathematical methods in the optimization and planning of production Management Science, Vol. 6, 363-422, 1960.
- [Kar84a] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *STOC*, 1(11) :302–311, 1984.
- [Kar84b] N. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(4) :373–396, 1984.
- [Kha79] L.G. Khachiyan. Un algorithme polynomial en programmation linéaire. *Doklady Akademii Nauk SSR*, 224 :1093–1096, 1979. en russe, traduction anglaise : Soviet Math Doklady , Volume 20, 191-194.
- [Mur06a] K.G. Murty. Linear equations, inequations, lps, and an efficient new algorithm. In *INFORMS 2006*, pages 3–19, 2006. Tutorial.

- [Mur06b] K.G. Murty. A new practically efficient interior point method for lp. *Algorithmic Operations Research*, 1 :3–19, 2006.
- [NPL09] N. C. Nguyen, C. D. Pham, and T. H. Le. The outer constraction method for linear programming problem. Communication personnelle, Hanoi, 2009.
- [PL09] C. D. Pham and T. H. Le. An alternating projections algorithm for solving linear programs. *Acta Mathematica Vietnamica*, 34(3) :335–343, 2009.
- [Tol39] A. Tolstoï. Méthodes d’élimination des transports non rationnels lors de la planification. *Le transport socialiste*, 1(9) :28–51, 1939. En Russe.